МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а)③ Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|\vec{x}|<1} \frac{d^3x}{|\vec{x}-\vec{a}|}.$$

б)③ Найти поток векторного поля

$$\vec{F}\,(\vec{x}) = \frac{\vec{a}}{2+(\vec{x},\vec{a})}$$

через внешнюю поверхность сферы

$$S = \left\{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ |\vec{x}| = 1\ \right\}.$$

2. Задан функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \big(y'(x)\big)^2\, x\, dx, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

а)④ Найти допустимые экстремали функционала J.

б)② Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

3. В евклидовом пространстве $\mathcal{E} = CL_2[0, 2\pi]$ рассматриваются функции

$$h(x) = x \quad \text{и} \quad f_k(x) = e^{ikx}, \quad \text{где} \quad k = \overline{1, N}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Здесь N — натуральное число. В $\mathcal{E}$ рассматривается подпространство L_N — линейная оболочка функций $f_1, \ldots, f_N$.

а)③ Найти ортогональную проекцию функции h на подпространство L_N.

б)③ Найти расстояние $\rho(h, L_N)$ от функции h до подпространства L_N и вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty} \rho(h, L_N).$$

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z^3}{\cos\left(\frac{1}{z}\right) + 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\ \},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\, dz.$$

5.⑥ Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = R,\ \ \operatorname{Im} z > 0\ \}, \quad C_R^- = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = R,\ \ \operatorname{Im} z < 0\ \},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z - i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

б)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\, dz.$$

в)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\, dz.$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на четвёртый курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а)③ Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|\vec{x}|<1} \frac{d^3x}{|\vec{x}-\vec{a}|}.$$

б)③ Найти поток векторного поля

$$\vec{F}\,(\vec{x}) = \frac{\vec{a}}{2+(\vec{x},\vec{a})}$$

через внешнюю поверхность сферы

$$S = \left\{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ |\vec{x}| = 1\ \right\}.$$

Ответ: а) $\frac{4\pi}{3}$, б) $4\pi \ln \frac{e}{3}$

Решение: а) В сферических координатах с полярным углом $\theta \in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$, имеем:

$$\int\limits_{|\vec{x}|<1} \frac{d^3x}{|\vec{x}-\vec{a}|} = \int\limits_0^1 dr\, r^2\, 2\pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dr\, r^2\, 2\pi \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{r^2 - 2rt + 1}} = \int\limits_0^1 dr\, r^2\, 2\pi \left(-\frac{1}{r}\right) \sqrt{r^2 - 2rt + 1}\Big|_{t=-1}^{t=1} =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 dr\, r\, \big(r + 1 - (1-r)\big) = 4\pi \int_0^1 r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Инструкция: В тройном интеграле сделан верный переход к сферическим координатам — 1 очко. Произведено интегрирование по полярному углу — 1 очко.

б) Для любой точки $\vec{x} \in S$ единичной внешней нормалью к S в этой точке является вектор $\vec{n}(\vec{x}) = \vec{x}$. Следовательно, поток векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю поверхность S равен

$$I = \int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS = \int\limits_{|\vec{x}|=1} \frac{(\vec{x},\vec{a})}{2+(\vec{x},\vec{a})}\, dS.$$

Параметризуя сферу S сферическими координатами с полярным углом $\theta \in$ $\in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$, находим:

$$I = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\theta \, \sin\theta \, d\theta}{2 + \cos\theta} = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{t \, dt}{2 + t} =$$

$$= 2\pi \left(2 - 2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{2 + t} \right) = 4\pi \left(1 - \ln 3\right) = 4\pi \ln \frac{e}{3}.$$

Инструкция: Поток записан в виде поверхностного интеграла — 1 очко. Поверхностный интеграл преобразован в терминах какой-либо параметризации сферы — 1 очко.

2. Задан функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \big(y'(x)\big)^2 x \, dx, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

а) 4 Найти допустимые экстремали функционала J.

б) 2 Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

Ответ: а) $y_*(x) = \ln x$ б) y_* — строгий минимум.

Решение: а) Уравнение Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dx}\big(2y'(x)x\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x)x = C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = C \ln x + D.$$

Из граничных условий $C \ln 1 + D = 0$ и $C \ln 2 + D = \ln 2$ получаем $D = 0$ и $C = 1$. Таким образом, единственной допустимой экстремалью является $y_*(x) = \ln x$.

Инструкция: а) Выписано уравнение Эйлера—Лагранжа — 1 очко. Найдено общее решение уравнения Эйлера—Лагранжа — 2 очка.

б) Для любой функции $h \in C^1[1, 2]$ вида $h(1) = h(2) = 0$ и $h \not\equiv 0$ имеем:

$$J(y_* + h) - J(y_*) = \int\limits_1^2 \big(h'(x)\big)^2 x \, dx \geq 0.$$

Следовательно, y_* — минимум. Если предположить, что $J(y_* + h) - J(y_*) = 0$, то, в силу неотрицательности и непрерывности функции $\big(h'(x)\big)^2 x$ на отрезке интегрирования $[1, 2]$, получаем, что $\big(h'(x)\big)^2 x = 0$ для любого $x \in [1, 2]$. Это равносильно $h'(x) \equiv 0$ на $[1, 2]$, откуда, по теореме Лагранжа, получаем, что $h(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[1, 2]$. Так как $h(1) = h(2) = 0$, то $h(x) \equiv 0$ на $[1, 2]$, что противоречит условию $h(x) \not\equiv 0$. Следовательно, $J(y_* + h) - J(y_*) > 0$, то есть y_* — строгий минимум.

Инструкция: Показано, что y_* доставляет минимум — 1 очко. Показано, что y_* является строгим минимумом — 1 очко.

3. В евклидовом пространстве $\mathcal{E} = CL_2[0, 2\pi]$ рассматриваются функции

$$h(x) = x \quad \text{и} \quad f_k(x) = e^{ikx}, \quad \text{где} \quad k = \overline{1, N}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Здесь N — натуральное число. В $\mathcal{E}$ рассматривается подпространство L_N — линейная оболочка функций $f_1, \ldots, f_N$.

а) ③ Найти ортогональную проекцию функции h на подпространство L_N.

б) ③ Найти расстояние $\rho(h, L_N)$ от функции h до подпространства L_N и вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty} \rho(h, L_N).$$

Ответ: а) $P_N h = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{i f_k}{k}$

б) $\rho(h, L_N) = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{k^2}}, \quad \lim\limits_{N\to\infty} \rho(h, L_N) = \sqrt{\frac{7\pi^3}{3}}.$

Решение: а) Заметим, что при $k \neq m$ функции f_k и f_m перпендикулярны в $\mathcal{E}$, так как

$$(f_k, f_m) = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\, e^{-imx}\, dx = \left.\frac{e^{i(k-m)x}}{k-m}\right|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{1-1}{k-m} = 0$$

Следовательно, ортогональной проекцией $P_N h$ функции h на подпространство L_N является сумма ортогональных проекций h на $\mathrm{Lin} f_k$ по $k \in \overline{1, N}$:

$$P_N h = \sum_{k=1}^{N} \frac{(h, f_k)}{(f_k, f_k)} f_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} x e^{-ikx}\, dx \right) f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{ik} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik}\, dx \right) f_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{i f_k}{k}.$$

Инструкция: Обосновано, что проекция h на L_N есть сумма проекций на $\mathrm{Lin} f_k$ по $k \in \overline{1, N}$ — 1 очко. Верно записана проекция h на $\mathrm{Lin} f_k$ — 1 очко.

б) Расстоянием от h до L_N равно расстоянию от h до $P_N h$:

$$\rho(h, L_N) = \sqrt{(h - P_N h, h - P_N h)} = \sqrt{(h, h) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\left|(h, f_k)\right|^2}{(f_k, f_k)}} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} x^2\,dx - \sum_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{k^2}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \sum_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{k^2}}$$

Как известно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ Следовательно, находим:

$$\lim_{N\to\infty} \rho(h, L_N) = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{2\pi\cdot\pi^2}{6}} = \sqrt{\frac{7\pi^3}{3}}.$$

Инструкция: Найдено расстояние от h до L_N — 2 очка.

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z^3}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \{\ z\in\mathbb{C}\ :\ |z| = 1\ \},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\,dz.$$

Ответ: а) $z_k = \frac{1}{\pi+2\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$, — полюсы второго порядка, $z=\infty$ — полюс третьего порядка, б) $\frac{\pi i}{24}$.

Решение: а) Так как $\cos\frac{1}{z}+1 = 0$ равносильно $\frac{1}{z} = \pi + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то точки $z_k = \frac{1}{\pi+2\pi k}$ для $k\in\mathbb{Z}$ являются нулями знаменателя функции $f(z)$ при ненулевом числителе. Далее $\frac{d}{dz}\left(\cos\frac{1}{z}+1\right)\Big|_{z=z_k} = -\frac{1}{z_k^2}\sin\frac{1}{z_k} = 0$, $\frac{d^2}{dz^2}\left(\cos\frac{1}{z}+1\right)\Big|_{z=z_k} = \frac{1}{z_k^4}\cos\frac{1}{z_k} = -\frac{1}{z_k^4} \neq 0$. Следовательно, z_k — полюс второго порядка f. Так как $z_k\to 0$ при $k\to\infty$, то $z=0$ — неизолированная особая точка f. Далее, при $z\to\infty$ выполнено $f(z)\sim\frac{z^3}{2}$, поэтому $z=\infty$ — полюс третьего порядка f.

Инструкция: Верно найдены нули знаменателя — $1/2$ очка. Определён тип нуля знаменателя — $1/2$ очка. Указано, что $z=0$ — неизолированная особая точка — $1/4$ очка. Точка $z=\infty$ объявлена изолированной особой — $1/4$ очка. Определён тип $z=\infty$ — $1/2$ очка.

б) Заметим, что для каждого $k\in\mathbb{Z}$ выполнено $|z_k| \le \frac{1}{\pi} < 1$. Следовательно,

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

При $|z| > 1$ имеем:

$$f(z) = \frac{z^3}{2 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)} =$$

$$= \frac{z^3}{2}\left(1 + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^4} - \frac{1}{48z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)\right) =$$

$$= \frac{z^3}{2} + \frac{z}{8} + \frac{1}{48z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{48}$, откуда

$$\oint_C f(z)\,dz = \frac{\pi i}{24}.$$

Инструкция: Интеграл записан в терминах вычетов — 1 очко. Найден вычет на бесконечности — 3 очка.

5.(6) Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R,\;\; \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad C_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R,\;\; \operatorname{Im} z < 0 \,\},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z - i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)(2) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

б)(2) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)\,dz.$$

в)(2) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^-} f(z)\,dz.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{e}$ б) $-\pi e$ в) $\frac{\pi}{e}$.

Решение: а) Для любого $R > 1$ имеем:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{2i(x-i)} - \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix}\,dx}{2i(x-i)}.$$

Определим в комплексной плоскости две области

$$G_R^+ = \{ \, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R,\;\; \operatorname{Im} z > 0 \, \}\,, \quad G_R^- = \{ \, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R,\;\; \operatorname{Im} z < 0 \, \}\,,$$

границы которых ориентированы против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{2i(x-i)} = \underbrace{\oint\limits_{\partial G_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=\frac{\pi}{e}} - \underbrace{\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{\mathbb{R}\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{e},$$

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{-ix}\,dx}{2i(x-i)} = -\underbrace{\oint\limits_{\partial G_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{\mathbb{R}\to+\infty}{\to} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

Инструкция: После применения формулы Эйлера для $\sin(x)$ найден предел одного из двух возникших интегралов — 1 очко.

б) Для любого $R > 1$ имеем:

$$\int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz = \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} - \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}.$$

По лемме Жордана,

$$\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} \overset{R\to+0}{\to} 0.$$

Определим в комплексной плоскости область

$$B_R = \{ \, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R \, \}\,,$$

граница которой ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)} = \underbrace{\oint\limits_{B_R} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=\pi e} - \underbrace{\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{R\to+\infty}{\to} \pi e.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz = -\pi e.$$

Инструкция: После применения формулы Эйлера для $\sin(z)$ найден предел одного из двух возникших интегралов — 1 очко.

в) Для любого $R > 1$ имеем:

$$\int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz = \int\limits_{C_R^-} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} - \int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}.$$

По лемме Жордана,

$$\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)} \overset{R\to+0}{\to} 0.$$

Определим в комплексной плоскости область

$$B_R = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ \ |z| < R\ \},$$

граница которой ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} = \underbrace{\oint\limits_{B_R} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=\frac{\pi}{e}} - \underbrace{\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{R\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{e}.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e}.$$

Инструкция: После применения формулы Эйлера для $\sin(z)$ найден предел одного из двух возникших интегралов — 1 очко.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЗАДАЧА ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

для поступающих на первый курс по специальности ПМИ

6. Задан нетривиальный n–мерный числовой столбец a (здесь n — натуральное число, большее единицы). Пусть E_n — единичная $n \times n$ матрица.

а)① Вычислить $\det(aa^{\mathrm{T}})$ и $\operatorname{rg}(aa^{\mathrm{T}})$.

б)① Для любого n–мерного числового столбца b найти все решения x линейной системы уравнений

$$\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right) x = b.$$

в)① Доказать, что матрица $\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right)$ невырождена, и вычислить обратную матрицу

$$\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

г)② Вычислить $\det\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right)$.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–5	НЕУД. (2)
6–8	УДОВЛ. (3)
9–11	УДОВЛ. (4)
12–14	ХОР. (5)
15–17	ХОР. (6)
18–20	ХОР. (7)
21–23	ОТЛ. (8)
24–26	ОТЛ. (9)
27–30	ОТЛ. (10)